第11讲双变量不等式:极值和差商积问题

一. 解答题 (共21小题)

1. (2021春•温州期中) 已知函数 $f(x)=lnx-\frac{1}{2}(ax-\frac{1}{x})$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $0<x<1$ 时, $f(x)>0$; 当 $x>1$ 时, $f(x)<0$.

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 证明: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1-a}{2}$.

2. (2021春•浙江期中) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+alnx$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 证明: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

3. (2021秋•武汉月考) 已知函数 $f(x)=lnx+\frac{a}{2}x^2-(a+1)x,a\in R$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 x_1, $x_2(0<x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)=f(x)+x$ 的两个极值点, 证明: $g(x_1)-g(x_2)<\frac{a}{2}-lna$ 恒成立.

4. (2021秋•南昌月考) 已知函数 $f(x)=lnx-\frac{a}{x+1}(a\in R)$.

(Ⅰ) 若函数 $y=f(x)$ 在定义域上单调递增, 求实数 a 的取值范围;

(Ⅱ) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 求实数 a 的取值范围, 并比较 $f(x_1)+f(x_2)$ 与 x_1+x_2 的大小.

5. (2021•运城模拟) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-2x+lnx$, 其中 $a>0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

□2□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $f(x_1)+f(x_2)<-3$ □

6□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=lnx+mx$ □ $m\in R$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□ $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ $g(x_1)+g(x_2)+3<0$ □

7□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $a\neq 0$ □□□□ $f(x)=\frac{a}{x}-ln^2x$ □

□I□□□ $f(x)$ □□□□□

□II□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{k(x_1-x_2)}-e^2(x_1+x_2)+2e>0$ □□□□□□□□ k □□□□□

8□□2021□•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-bx+lnx$ □

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $b\geqslant\frac{5}{2}$ □□ $f(x_1)-f(x_2)\geqslant k$ □□□□□□□ k □□□□□

9□□2021□•□□□□□□□□□ $f(x)=2x+alnx^2(x>0)$ □ $x=1$ □□□□ l □□□ $4x-y=0$ □□□□□ $g(x)=f(x)+bx^2-4x$ □

□1□□□□ a □□□

□2□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□ b □□□□□□

□3□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□ $g(x_1)-g(x_2)<(2b-1)(x_1-x_2)$ □

10□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{ae^x}{x}+lnx-x, a\in R$ □

□I□□ $a=\frac{1}{e}$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□II□ $f(x)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□□ a □□□□□□□□□ $f(x_1)+f(x_2)<0$ □

11．(2021•南关区校级四模) 已知函数 $f(x)=x^2-2ax\ln x+1$ 有两个极值点 x_1，x_2.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_2-x_1}<a^2+1$.

12．(2021 春•姑苏区校级月考) 已知函数 $f(x)=a\ln x-ax+1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-1$ 有两个极值点，x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$.

① 求 a 的取值范围;

② 若 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

13．(2021 春•台江区校级期末) 已知函数 $f(x)=-\ln x-ax^2+4x(a>0)$.

(1) 若 $f(x)$ 是定义域上的单调函数，求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 在定义域上有两个极值点 x_1，x_2，证明: $f(x_1)+f(x_2)>3+2\ln2$.

14．(2021 春•绵阳期末) 已知 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x+1}$，$a\in R$.

(1) 当 $a>2$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：当 $x_2\in[\frac{1}{4},4]$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<\frac{2a-8}{3}$.

15．(2021 秋•庄浪县校级月考) 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax(a\in R)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x-a+f(x-1)$，设 x_1，$x_2(x_1<x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点，若 $a\geqslant\frac{3}{2}$，求证: $g(x_1)-g(x_2)\geqslant\frac{15}{8}-2\ln2$.

16．(2021 春•绵阳期末) 已知函数 $f(x)=a\ln x-\frac{1}{x}+x$，$a\in R$.

(1) 当 $a=-\frac{5}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：当 $x_2\in[\frac{1}{4},4]$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<a+10$.

17. (2021 秋•平邑县校级月考) 已知函数 $f(x)=x^2-x-alnx$，$a\in R$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围.

(2) 若函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，当 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{a}<m$ 恒成立时，求实数 m 的最小值.

18. (2021 春•新乡期末) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)+a(lnx-4x+1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $f(x_1)+f(x_2)\geq f(x_1x_2)-4a$，求 a 的取值范围.

19. (2021 春•武清区校级期末) 已知函数 $f(x)=lnx-ax^2-bx$.

(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 有最大值 -1，

(i) 求实数 b 的值;

(ii) 证明：当 $x>1$ 时，$2lnx<(x-1)e^x$;

(2) $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 存在两个极值点 x_1，$x_2(x_2>x_1)$ 且 $f(x_2)-f(x_1)$ 的取值范围是 $(2ln2-\frac{15}{8},ln2-\frac{3}{4})$，求 b 的取值范围.

20. (2021 春•商洛期末) 已知函数 $f(x)=2e^x(e^x-2a)+4ax+a^2$.

(1) 当 $a<0$ 时，求 $f(x)$ 极值点的个数;

(2) 若 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，且 $f(x_1)+f(x_2)<t(e^{x_1}+e^{x_2})$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

21. (2021•庐阳区校级模拟) 已知函数 $f(x)=lnx-ax-\frac{2}{ax}$.

(I) 若 $f(x)\geq 0$，求实数 a 的取值范围;

□II□□ $g(x) = f(x) + x^2 + \frac{2}{ax}$□□□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1 < x_2)$ □□ $2g(x_1) - g(x_2)$ □□□□□